Elementy teorii operatorów liniowych
(metoda Mullina i Roty)

Poniższe materiały są skrótowym podsumowaniem rozdziału „Tożsamości wielomianowe, zastosowania teorii operatorów liniowych (MetodaMullina i Roty) z [1]. Dowody Twierdzeń, których nie przytoczono znajdują się również w [1].

1. Ciąg typu dwumiennego

Definicja 1 *Ciągiem typu dwumiennego nazywamy każdy ciąg* $\langle W_n(x) \rangle_{n\geq 0}$ *wielomianów o współczynnikach w ciele* ***C*** *spełniających następujące warunki*
(1) $\deg W_n(x) = n$
(2) $W_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} W_k(x) W_{n-k}(y)$

Przykłady ciągów typu dwumiennego

- x^n, $x^{\underline{n}}$ oraz $x^{\overline{n}}$
- wielomiany Abela $A_n(x) = x(x-na)^{n-1}$
- wielomiany Laguerre'a $L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} x^k$

Własności ciągów dwumiennych

1. Z (1) mamy, że każdy taki ciąg jest bazą w przestrzeni liniowej wielomianów.
2. Mając dwa ciągi typu dwumiennego $\langle W_n(x) \rangle_{n\geq 0}$ i $\langle V_n(x) \rangle_{n\geq 0}$, to w rozwinięciu $W_n(x)$ względem $\langle V_n(x) \rangle_{n\geq 0}$ mamy jedynie skończoną liczbę niezerowych wyrazów $V_0(x), V_1(x), \ldots, V_n(x)$ (z $\deg W_n(x) = n$)
3. Z (2) mamy, że $W_0(x)=1$, gdyż $W_0(x)$ jest wielomianem stałym, natomiast wielomiany $W_n(x)$ dla $n>0$ mają wyraz wolny równy zeru tj. $W_n(0) = 0$ dla $n>0$.

Dowód
$W_0(x) = W_0(x)W_0(0) \Rightarrow 1 \equiv W_0(0) \Rightarrow (\deg(W_0(x))=0) \Rightarrow W_0(x) \equiv 1$
$W_1(x) = W_0(x)W_1(0) + W_1(x)W_0(0) \Rightarrow W_1(x) = W_1(0) + W_1(x) \Rightarrow 0 = W_1(0)$ *etc.*

2. Operatory Liniowe

Rozważmy rodzinę operatorów liniowych przestrzeni wielomianów nad ciałem **C**. Każdy taki liniowy operator Q spełnia

$$Q[aW(x)+bV(x)] = aQ[W(x)] + bQ[V(x)]$$

dla $a, b \in \mathbf{C}$.

Przykłady operatorów liniowych

- Operator identycznościowy $\mathbf{I}x^n = x^n$
- Operator przesunięcia $\mathbf{E}^a x^n = (x+a)^n$
- Operator różniczkowania $\mathbf{D}x^n = nx^{n-1}$
- Operator wartości w punkcie a $\mathbf{K}^a x^n = a^n$
- Operator mnożenia przez x $\mathbf{M}^x x^n = x^{n+1}$

Ćwiczenie 1

Niech $K = K^0$. Wykazać, że

(1) $I = \sum_{k\ge 0} \frac{x^k}{k!} KD^k$

(2) $E^y = \sum_{k\ge 0} \frac{y^k}{k!} D^k \equiv e^{yD}$

Odpowiedź

Porównamy wartości operatorów na dowolnym elemencie $a_n x^n$ wielomianu W(x)

(1) Lewa strona $Ia_n x^n = a_n x^n$

Prawa strona $\sum_{k\ge 0} \frac{x^k}{k!} KD^k = \left(KD^0 + xKD^1 + \frac{x^2}{2!} KD^2 + \dots \right)$

Zauważmy, że dla k<n operator K^0 wyzeruje wartość tak samo jak dla k>n operator D^k. Jedynie dla k=n mamy niezerową wartość

$$a_n \left(\sum_{k\ge 0} \frac{x^k}{k!} KD^k \right) x^n = a_n \frac{x^n}{n!} n! = a_n x^n$$

(2) Lewa strona $a_n E^y x^n = a_n (x+y)^n$

Prawa strona $\sum_{k\geq 0}\frac{y^k}{k!}D^k = \left(D^0 + \frac{y}{1}D^1 + \ldots + \frac{y^n}{n!}D^n + \ldots\right)$, zatem

$$a_n\left(\sum_{k\geq 0}\frac{y^k}{k!}D^k\right)x^n = a_n x^n + a_n\frac{n}{1}y^1x^{n-1} + a_n\frac{n(n-1)}{2}y^2x^{n-2} + \ldots + a_n\binom{n}{n}y^n =$$
$$= a_n(x+y)^n$$

Składanie operatorów nie jest w ogólności przemienne. Niech $\mathbf{Q}^k$ oznacza k-krotne złożenie operatora $\mathbf{Q}$. Ważną rodziną operatorów są operatory niezmiennicze ze względu na przesunięcia.

Definicja 2 *Mówimy, że operator* $\mathbf{Q}$ *jest niezmienniczy ze względu na przesunięcia wtedy, i tylko wtedy, gdy dla dowolnego* $a \in \mathbf{C}$ *zachodzi*

$$\mathbf{Q}E^a = E^a\mathbf{Q}$$

Definicja 3 *Delta operatorem nazywamy każdy operator liniowy Q, który*

(1) jest niezmienniczy ze względu na przesunięcia
(2) Qx = const ≠ 0

Przykłady delta operatorów

- $\mathbf{D}x^n = nx^{n-1}$
- $\Delta = \mathbf{E}^1 - \mathbf{I}$
- $\nabla = \mathbf{I} - \mathbf{E}^{-1}$
- $\mathbf{DE}^a$

Lemat 1 *Niech Q będzie delta operatorem. Wówczas*

(1) $Qa = 0$ dla każdego wielomianu stałego a.
(2) Jeśli $W(x)$ jest wielomianem stopnia n>0, to $QW(x)$ jest niezerowym wielomianem stopnia n-1.

Definicja 4 *Ciąg* $\langle w_n(x)\rangle_{n\geq 0}$ *jest bazą dla delta operatora Q, jeśli każdy z wielomianów spełnia*

(1) $\deg(w_n(x)) = n$
(2) $w_0(x) = 1$
(3) $w_n(0) = 0$ dla $n > 0$

(4) $Qw_n(x) = nw_{n-1}(x)$

Twierdzenie 1 *Każdy delta operator ma dokładnie jedną bazę.*

Twierdzenie 2 (Mullin, Rota). *Na to, by ciąg* $\langle w_n(x)\rangle_{n\geq 0}$ *był bazą dla pewnego delta operatora, potrzeba i wystarcza, by był on typu dwumiennego.*

Twierdzenie 3 (I Twierdzenie Eksponencjalne)
Niech Q będzie delta operatorem o bazie $\langle w_n(x)\rangle_{n\geq 0}$. *Operator liniowy S jest niezmienniczy ze względu na przesunięcia wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwinięcie*

$$S = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k!} Q^k$$

gdzie $a_k = [Sw_k(x)]_{x=0}$.

Ćwiczenie 2
Zastosuj powyższe twierdzenie do uzyskania wzoru Taylora.

Odpowiedź
Niech dane będą: delta operator D z ciągiem bazowym $w_n(x) = x^n$ oraz operator translacyjnie niezmienniczy T^α, wtedy $T^\alpha = \sum_{k\geq 0} \frac{[T^\alpha x^k]_{x=0}}{k!} D^k$. Weźmy dowolny wielomian $W(x)$

$$T^\alpha W(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{[T^\alpha x^k]_{x=0}}{k!} (D^k W)(x)$$

$$W(x+\alpha) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha^k}{k!} (D^k W)(x)$$

Po zamianie ról x z α otrzymujemy

$$W(x+\alpha) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} (D^k W)(\alpha).$$

Twierdzenie 4 (O Izomorfizmie)
Niech Q będzie delta operatorem. Odwzorowanie Φ, *zadane wzorem*

$$\Phi\left(\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} Q^n$$

jest izomorfizmem algebry C[[x]] (szeregów formalnych zmiennej x) i algebry operatorów niezmienniczych ze względu na przesunięcia.

Wniosek 1
W algebrze operatorów niezmienniczych ze względu na przesunięcia składanie jest działaniem przemiennym.

Wniosek 2
Operator Q jest niezmienniczy ze względu na przesunięcia wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\langle a_n \rangle_{n\geq 1}$ *taki, że* $Q = \sum_{n\geq 0} a_n D^n$.

Wniosek 3
Niech Q będzie operatorem niezmienniczym ze względu na przesunięcia. Wówczas Q jest operatorem odwracalnym wtedy i tylko wtedy, gdy Q1≠0.

Wniosek 4
Delta operatory nie są odwracalne.

Twierdzenie 5 (Mullin, Rota)
Operator Q jest delta operatorem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\langle a_n \rangle_{n\geq 1}$ *taki, że* $a_1 \neq 0$ *oraz*

$$Q = \sum_{n\geq 1} a_n D^n$$

3. Produkcja nowych operatorów

Niech $\hat{x}$ będzie operatorem zwiększającym stopień wielomianu tj.

$$\hat{x}p(x) = xp(x)$$

Operator $\hat{x}$ nie jest translacyjnie niezmienniczy.

Twierdzenie 3.1 Jeśli T jest operatorem translacyjnie niezmienniczym, to

$$T' = T\hat{x} - \hat{x}T$$

także jest translacyjnie niezmienniczy. T' nazywamy **pochodną Pincherele** operatora T.

Wniosek 3 *Q jest delta operatorem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje operator odwracalny* $P \in \Sigma$ *taki, że* $Q = DP$. *(D – operator różniczkowania Σ - pierścień operatorów translacyjnie niezmienniczych)*

4. Notacja zaćmieniowa (umbralna)

Twierdzenie 4.1 (O automorfizmie)

Niech P i Q będą delta operatorami o bazach odpowiednio $\langle p_n(x) \rangle_{n\geq 0}$, $\langle q_n(x) \rangle_{n\geq 0}$.Niech T będzie operatorem liniowym (niekoniecznie translacyjnie niezmienniczym) takim, że dla n∈N zachodzi $Tp_n(x) = q_n(x)$. Wówczas

(a) Operator T jest odwracalny

(b) przekształcenie określone wzorem $S \mapsto TST^{-1}$ jest automorfizmem algebry operatorów translacyjnie niezmienniczych, który przeprowadza delta operatory na delta operatory

(c) jeśli $\langle w_n(x) \rangle_{n\geq 0}$ jest ciągiem typu dwumiennego, to ciąg $\langle Tw_n(x) \rangle_{n\geq 0}$ jest także ciągiem typu dwumiennego.

5. Literatura

[1] Witold Lipski, Wiktor Marek, *Analiza kombinatoryczna*, PWN W-wa 1986, (Rozdział 3)

[2] Ewa Krot-Sieniawska, *Rozszerzenie rachunku operatorowego Mullina-Roty i pokrewne zastosowania analizy kombinatorycznej*, Praca doktorska, Politechnika Łódzka, Łódź 2008